Gimnazija „Dušan Vasiljev“

Kikinda

MATURSKI RAD iz matematike

Tema: Teorija grafova

Školska 2015/2016

Mentor: Živko Jovanovski Kandidat: Filip Blašković

Kikinda, maj 2016. godine

Sadržaj

1 Uvod

Poslednjih decenija teorija grafova je postala veoma važna oblast matematike koja sve više nalazi primenu u narazličitijim naukama, počev od računarskih nauka, fizike, hemije, elektrotehnike, genetike preko arhitekture i geografije, pa sve do društvenih nauka kao što su lingvistika i sociologija. Ova, relativno nova grana matematike je u XX veku doživela ekspanziju i od tada se sve brže razvija.

Prvim naučnim radom vezanim za teoriju grafova smatra se rad Leonarda Ojlera (1707-1783) iz 1736. godine na temu Sedam mostova Kalinjingrada (v. poglavlje 7). Nakon ovog i nešto kasnije Vandermondovog rada o problemu konjićevog skoka, teorija grafova postaje sve popularnija među matematičarima XVIII i XIX veka. Ojlerovu formulu o broju grana, čvorova i lica konveksnog poliedra su proučavali i francuski matematičari Ogisten Luj Koši (1789-1857) i Simon Žan Antoan Luije (1750-1840) što je predstavljalo začetak nove oblasti matematike, topologije.

Što je teorija grafova vremenom sve više napredovala, nalazila je sve učestalije primene u drugim naukama. Doprinos engleskog matematičara Artura Kejlija (1821-1895) začetku enumerativne teorije grafova kojom je kasnije nastavio da se bavi mađarski matematičar ĐerđPolja (1887-1985), bio je veoma značajan za dalji razvoj teorijske hemije i fizike. Sredinom XIX veka teorija grafova počinje da se proučava i pomoću algebre, što je prvi u svojim radovima predstavio nemački fizičar Gustav Kirhof (1824-1887), čuven po Kirhofovim zakonima o odnosu struje i napona u električnom kolima. Razvoj probabilističkih metoda u teoriji grafova tokom XX veka, posebno u studijama Pala Erdeša (1913-1996) i Alfreda Renjija (1921-1970), doveo je do razvoja nove oblasti poznate kao teorija slučajnih grafova.

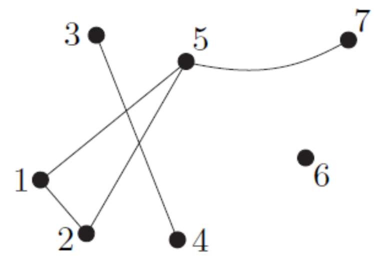
Prvi udžbenik na temu teorije grafova napisao je mađarski matematičar jevrejskog porekla Deneš Kenig (1884-1944) 1936. godine, a udžbenik Frenka Hararija (1921-2005) iz 1969. smatran je za najbolji udžbenik na pomenutu temu svoga vremena.

2 Osnovni pojmovi

Na samom početku definišimo pojam grafa.

Definicija 2.1 *Neorijentisani graf je par skupova* $G = (V, E)$ *koji zadovoljava* $E \subset [V]^2$.

Dakle, elementi skupa E su dvočlani podskupovi skupa V. Uobičajeni način prikazivanja grafa u ravni je pomoću tačaka (koje predstavljaju čvorove grafa, odnosno elemente skupa V) i duži koje spajaju te tačke (grane grafa, odnosno elementi skupa E) (Slika 1)



Slika 1: Graf na skupu čvorova $V = \{1, ..., 7\}$ sa skupom grana $E = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{5,7\}\}$

Skup čvorova grafa G obeležava se sa $V(G)$, a skup grana sa $E(G)$ (Napomenimo da su ove oznake nezavisne od imena skupova, tj. skup temena grafa $H = (Z, N)$ se i dalje označava sa $V(H)$)

Definicija 2.2 *Red grafa predstavlja broj njegovih čvorova i označava se sa* $|G| = |V(G)|$*, a broj grana se obeležava* $||G|| = |E(G)|$

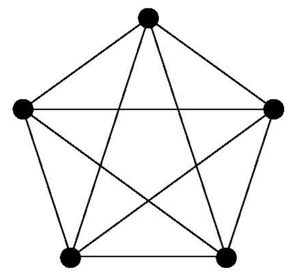
Grafovi mogu biti konačni i beskonačni, u zavisnosti od njihovog reda. U nastavku rada bavićemo se samo konačnim grafovima. Graf reda 0 ili 1 se naziva *trivijalan* graf.

Definicija 2.3 *Dva čvora x i y grafa (V, E) su susedna ako postoji grana $e = (x, y) \in E$. Čvorovi x i y su krajnje tačke grane e, a za čvor $x \in V$ i granu $e \in E$ (odnosno čvor y i granu e) kažemo da su* ***incidentni*** *i da se grana e* ***stiče*** *u čvoru x (odnosno y). Dve grane su susedne ako se stiču u istom čvoru.*

Granu $e = \{x, y\}$ možemo jednostavnije zapisati kao $e = xy$ (ili $e = yx$). Ako je $x \in X$ i $y \in Y$, onda je xy $X - Y$ grana. Skup svih $X - Y$ grana obeležava se sa $E(X, Y)$.

Dva čvora $x \neq y$ grafa G su *susedna* ako je xy grana grafa G. Dve grane $e \neq f$ su susedne ako imaju jedan zajednički čvor.

Definicija 2.4 *Graf G je* ***kompletan*** *ako su svaka dva čvora međusobno susedna. Kompletan graf sa n čvorova se obeležava sa K^n. (Slika 2)*



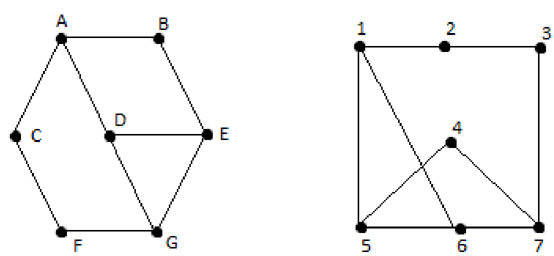
Slika 2: Primer kompletnog grafa sa pet čvorova (K^5).

Nesusedni čvorovi ili grane se nazivaju *nezavisni*. Formalnije, skup čvorova ili grana je nezavisan ako nikoja dva njegova elementa nisu susedna.

Definicija 2.5 *Dva grafa $G = (V, E)$ i $G' = (V', E')$ su* ***izomorfna*** *ako postoji bijekcija $\varphi : V \to V'$ i gde je $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$ za sve $x, y \in V$. Izomorfne grafove G i G' označavamo sa $G \simeq G'$. (Slika 3)*

Definicija 2.6 ***Automorfizam*** *između grafova G i G' je izomorfizam gde važi $G = G'$.*

Uglavnom ne pravimo razliku između izomorfnih grafova. Stoga, obično pišemo $G = G'$ (češće nego $G \simeq G'$).



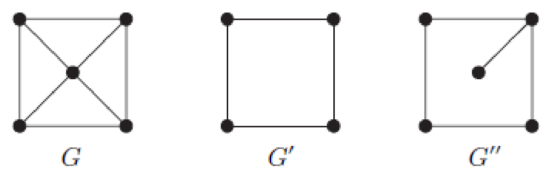
Slika 3: Primer izomorfnih grafova

2.1 Podgraf i razapinjući podgraf

Pišemo $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$ i $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$. Ako je $G \cap G' = \varnothing$, onda su G i G' *razdvojeni*. Ako je $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$, onda je G' *podgraf* grafa G što označavamo sa $G' \subseteq G$ (ili kažemo da G sadrži G').

Ako je U skup čvorova (među kojima su i ne nužno svi čvorovi grafa G) onda graf $G[V \setminus U]$ označavamo sa $G - U$. Drugim rečima, graf $G - U$ dobijamo iz G brisanjem svih čvorova iz $U \cap V$ i njihovih incidentih grana. Ako je $U = \{v\}$ jednočlani skup, pišemo $G - v$ umesto $G - \{v\}$. Umesto $G - V(G')$ pišemo jednostavnije $G - G'$. Za podskup F skupa $[V]^2$ pišemo $G - F := (V, E \setminus F)$ i $G + F := (V, E \cup F)$. Kao i u prethodnom slučaju, $G - \{e\}$ i $G + \{e\}$ se pišu kraće kao $G - e$ i $G + e$.

Ako je $G' \subseteq G$ i ako G' sadrži sve grane $xy \in E$, gde je $x, y \in V'$ onda je G' *indukovani* podgraf grafa G; kažemo da V' indukuje G' u G i pišemo $G' = G[V']$. Dakle, ako je $U \subseteq V$ bilo koji skup čvorova, onda $G[U]$ označava graf na skupu U čije su grane tačno one čiji se krajevi nalaze i u skupu $V(G)$. Konačno, $G' \subseteq G$ je *razapinjući* podgraf grafa G ako je $V' = V$. (Slika 4)



Slika 4: Graf G sa podgrafovima G' i G''. G' je indukovani podgraf grafa G, dok G'' nije.

2.2 Stepen čvora

Neka je $G = (V, E)$ (neprazan) graf. Skup suseda čvoru v u G se obeležava sa $N_G(v)$ ili samo $N(v)$ [1]. Generalno govoreći: za $U \subseteq V$ susedi čvora iz skupa U, a koji se nalaze u skupu $V \setminus U$ nazivaju se susedi od U i njihov skup se obeležava sa $N(U)$.

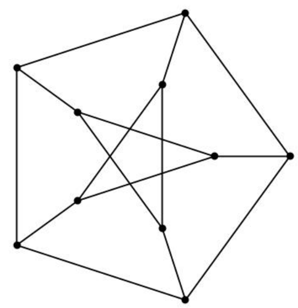
Definicija 2.7 ***Stepen*** *(valentnost)* $d_G(v) = d(v)$ *jeste broj grana* $|E(v)|$ *koje izlaze iz čvora* v*. Po definiciji grafa stepen čvora* v *jednak je broju suseda tog čvora* [2].

Čvor stepena $d(V) = 0$ naziva se još i *izolovan*.

Broj $\delta(G) := \min \{d(v) | v \in V\}$ naziva se *minimalni stepen grafa* G. Broj $\Delta(G) := \max \{d(v) | v \in V\}$ je *maksimalni stepen* grafa G. Ako svi čvorovi grafa G imaju jednak stepen k, kažemo da je G *k-regularan*, ili, jednostavnije, *regularan* (Slika 5).

[1] Možemo izostaviti oznaku grafa u ideksu ako je referenca jasna.

[2] Ne važi za multigrafove.



Slika 5: Petersenov graf: primer 3-regularnog grafa.

Prosečni stepen grafa G možemo predstaviti formulom:

$$d(G) := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v).$$

Jasno je da važi:

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G).$$

Prosečni stepen predstavlja broj grana po čvoru u grafu G. Nekada će biti pogodnije da taj odnos izrazimo direktno kao $\varepsilon(G) := \frac{|E|}{|V|}$.

Veličine d i ε su, naravno, povezane. Zaista, ako saberemo stepene svakog čvora pojedinačno, brojaćemo svaku granu grafa tačno dva puta. Dakle,

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} d(G) \cdot |V|,$$

odnosno, kada podelimo prethodnu jednakost sa $|V|$ dobijamo

$$\varepsilon(G) = \frac{1}{2} d(G).$$

Iskaz 2.8 *Broj čvorova neparnog stepena u grafu uvek je paran.*

Dokaz. Pošto za svaki graf nad skupom čvorova V važi $|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v)$, $\sum_{v \in V} d(v)$ mora biti paran broj. $\square$

Iskaz 2.9 *Svaki graf G sa bar jednom granom sadrži podgraf H gde važi $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.*

Dokaz. Da bismo konstruisali podgraf H iz grafa G, obrišimo prvo čvorove malog stepena (jedan po jedan), sve dok ne preostanu čvorovi velikog stepena. Očigledno, možemo brisati čvorove čiji je maksimalni stepen $d(v) = \varepsilon(G)$, a da pritom ne smanjimo vrednost ε (tj. da ne bude $\varepsilon(H) < \varepsilon(G)$). Ova tvrdnja se može pokazati i ovako:

$$\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|}$$

Ako je stepen čvora kojeg izbacujemo baš $d(v) = \varepsilon(G)$ biće:

$$\varepsilon(H) = \frac{|E| - d(v)}{|V| - 1} = \frac{|E| - \varepsilon(G)}{|V| - 1} = \frac{|E| - \frac{|E|}{|V|}}{|V| - 1} = \frac{\frac{|E|\cdot|V|}{|V|} - \frac{|E|}{|V|}}{|V| - 1} = \frac{\frac{|E|\cdot(|V|-1)}{|V|}}{|V| - 1} =$$
$$= \frac{|E| \cdot (|V| - 1)}{|V| \cdot (|V| - 1)} = \frac{|E|}{|V|} = \varepsilon(G)$$

Odavde se vidi da ako obrišemo čvor čiji je stepen $d(v) = \varepsilon(G)$ novodobijeni $\varepsilon(H)$ biće upravo jednak sa $\varepsilon(G)$.

Dakle, sve dok brišemo čvorove čiji je stepen $d(v) \leq \varepsilon$, ε' sledećeg (novodobijenog) grafa neće biti manji od ε, tj: $\varepsilon \geq \varepsilon'$.

Formalno, konstruišemo niz $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq ...$ podgrafova od G na sledeći način: ako G_i sadrži čvor v_i stepena $d(v_i)$ tako da važi $d(v_i) \leq \varepsilon(G_i)$, brišemo taj čvor i dobijeni podgraf postaje $G_{i+1} := G_i - v_i$ $(G_{i+1} \subseteq G_i)$. Ako takav čvor ne postoji, završavamo niz podgrafova i postavljamo $H := G_i$.

Ako možemo izabrati čvor v_i koje ispunjava navedene uslove, očigledno je da važi:

$$\varepsilon(G_{i+1}) \geq \varepsilon(G_i)$$

za svako i, odakle sledi:

$$\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G) \tag{1}$$

Dalje, pošto je $\varepsilon(K^1) = 0 < \varepsilon(G)$ (jer po uslovu graf G ima bar jednu granu, tj. bar dva čvora) nijedan od dobijenih podgrafova G_i nije trivijalan, pa samim tim ni podgraf H. Činjenica da graf H više nema čvorove pogodne za brisanje implicira da važi $\delta(H) > \varepsilon(H)$, tj. i za čvor a sa najmanjim stepenom u grafu H ipak vazi $d(a) > \varepsilon(H)$. U suprotnom bismo ga mogli obrisati. Dakle, važi:

$$\delta(H) > \varepsilon(H) \tag{2}$$

Iz (1) i (2) važi:

$$\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$$

$\square$

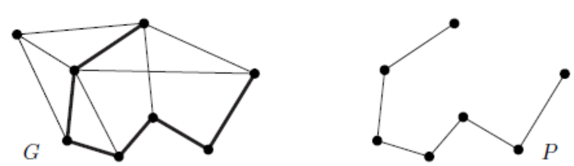
3 Putevi i ciklusi

3.1 Put

Definicija 3.1 ***Put*** *je neprazan graf $P(V, E)$ sledeće forme: $V = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_k\}$ i $E = \{x_0x_1, x_1x_2, ..., x_{k-1}x_k\}$ gde su svi x_i različiti za sve $i \leq k$.*

Čvorovi x_0 i x_k su povezani putem P i nazivaju se još i njegovi *krajevi*. Čvorovi $x_1, ..., x_{k-1}$ su unutrašnji čvorovi puta P. Broj grana koje put sadrži jeste njegova *dužina* i put dužine k označavamo sa P^k (k može imati i vrednost 0; onda je $P^0 = K^1$). (Slika 6)

Često da označimo put P zapisujemo niz čvorova koje P sadrži. Na primer: $P = x_0x_1...x_k$ i nazivamo ga putem od x_0 do x_k (ili put između x_0 i x_k).[3]



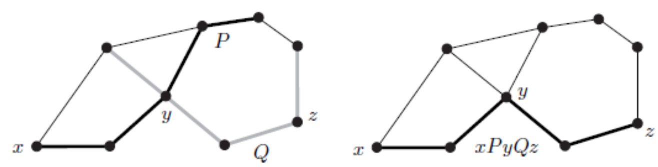
Slika 6: Put $P = P^6$ u grafu G.

Za $0 \leq i \leq j \leq k$ pišemo:

[3]Preciznije, nizovi $x_0x_1...x_k$ i $x_kx_{k-1}...x_0$ označavaju isti put. Ipak korisno je fiksirati prema oznakama jedan niz čvorova iz $V(P)$: tada možemo govoriti o "prvom" i "poslednjem" čvoru puta radi lakšeg razumevanja.

$$
\begin{aligned}
Px_i &:= x_0 ... x_i \\
x_iP &:= x_i ... x_k \\
x_iPx_j &:= x_i ... x_j
\end{aligned}
$$

Koristimo i slične intuitivne oznake za više puteva povezanih u lanac; na primer, ako je unija tri puta $Px \cup xQy \cup yR$ ponovo put, možemo jednostavnije pisati $PxQyR$. (Slika 7)



Slika 7: Putevi P, Q i $xPyQz$.

Ako su dati skupovi čvorova A i B, onda put $P = x_0...x_k$ nazivamo $A - B$ put ako važi: $V(P) \cap A = \{x_0\}$ i $V(P) \cap B = \{x_k\}$. Takođe radi jednostavnosti ponovo možemo pisati $a - B$ put ukoliko je jedan kraj puta a, a drugi kraj pripada skupu B.

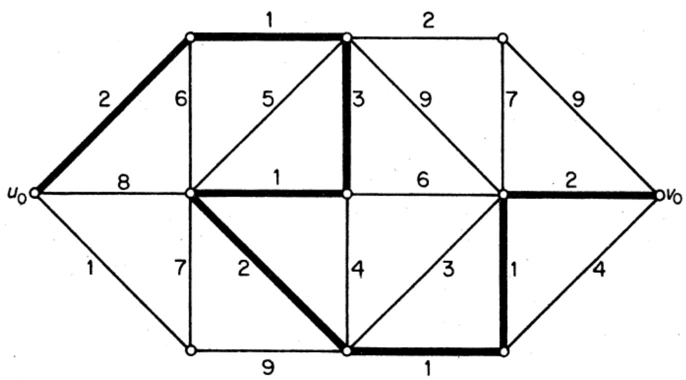
Ako je dat graf H onda se put P koji nije trivijalan i koji je takav da samo njegovi krajevi pripadaju grafu H obeležava kao H-put.

3.1.1 Problem nalaženja najkraćeg puta u grafu

Neka je svakoj grani e grafa G pridružen realan broj $w(e)$, koji se naziva njena *težina*. Onda se G, zajedno sa težinama grana, naziva *težinski graf*. Težinski grafovi imaju široku primenu. Na primer, u grafu prijateljstva, težine grana mogu označavati intenzitet prijateljstva, a u grafu vezanom za komunikacije mogu predstavljati troškove održavanja različitih komunikacionih veza. Ako je H podgraf težinskog grafa, težina $w(H)$ je suma težina njegovih grana: $w(H) = \sum_{e \in E(H)} w(e)$.

Suština mnogih problema nalaženja optimalnog rešenja u težinskom grafu je u pronalasku podgrafa sa minimalnom (ili maksimalnom) težinom. Jedan takav problem je i problem nalaženja najkraćeg puta u grafu.

Neka je data mreža pruga koja povezuje različite gradove. Potrebno je odrediti najkraću rutu između dva određena grada u mreži. Ovaj problem se može predstaviti i pomoću težinskog grafa gde je potrebno naći put minimalne težine koji povezuje dva čvora, recimo u_0 i v_0; težine grana predstavljaju rastojanja između direktno povezanih gradova, te one, dakle, nisu negativne. Put predstavljen na grafu na slici 8 je $u_0 - v_0$ put minimalne težine.



Slika 8: $u_0 - v_0$ put minimalne težine.

U nastavku će biti predstavljen algoritam za rešavanje problema nalaženja najkraćeg puta. Zbog jasnijeg izlaganja termin težine puta u težinskom grafu će biti zamenjen terminom dužina puta; slično, minimalna dužina puta $u - v$ će biti zamenjena terminom rastojanje između u i v. Radi preciznosti daljeg izlaganja potrebno je naglasiti da je reč o jednostavnom grafu (v. poglavlje 9) i da su vrednosti svih težina pozitivne. Međutim, poslednje nije striktno ograničenje jer se krajevi grane mogu poklapati ukoliko je njena težina jednaka 0. Takođe se prihvata da je $w(uv) = \infty$ ako $uv \notin E$.

Algoritam pronalaska najkraćeg puta je otkrio Edsger Dajkstra [4] 1959. godine. Algoritam ne pronalazi samo najkraći $u_0 - v_0$ put, već najkraće puteve od u_0 do bilo kog drugog čvora u grafu G. Osnovna ideja algoritma je sledeća: Pretpostavimo da je S podskup skupa čvorova V, takav da je $u_0 \in S$ i neka je sa $\bar{S}$ obeležen skup $V \setminus S$. Ako je $P = u_0 ... \bar{u}\bar{v}$ najkraći put od u_0 do $\bar{S}$, jasno je da je $\bar{u} \in S$ i $u_0 - \bar{u}$ deo puta P mora biti ujedno najkraći $u_0 - \bar{u}$ put. Dakle,

$$d(u_0, \bar{v}) = d(u_0, \bar{u} + w(\bar{u}\bar{v}),$$

[4]Edsger Dajkstra (Edsger Wybe Dijkstra, 1930-2002) je bio holandski matematičar i informatičar koji je 1972. godine dobio Tjuringovu nagradu za fundamentalne doprinose razvoju programskih jezika

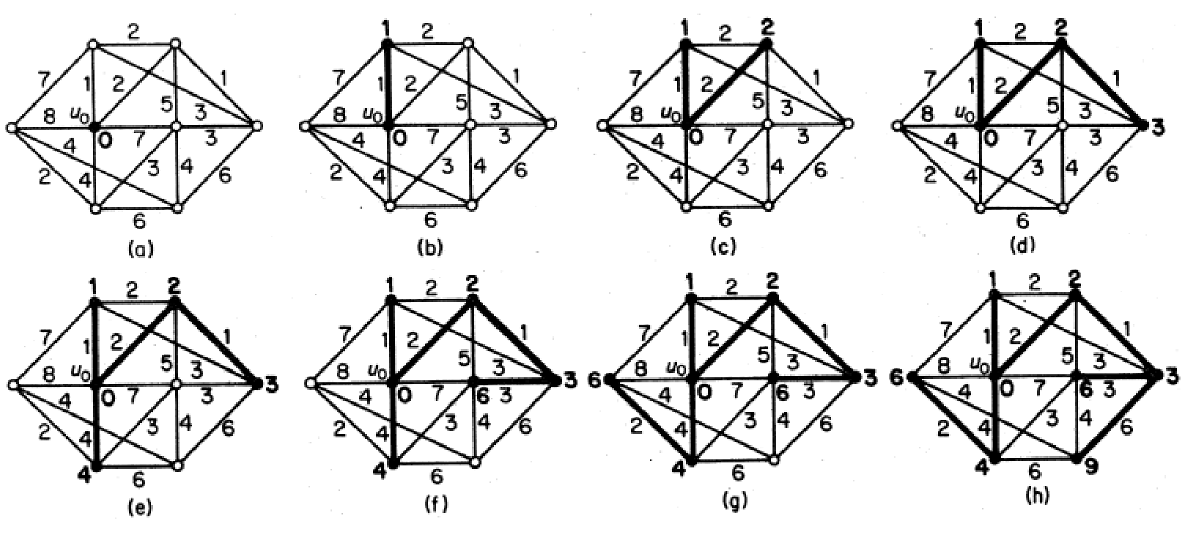
a rastojanje od u_0 do $\bar{S}$ je dato formulom

$$d(u_0, \bar{S}) = min_{u \in S, v \in \bar{S}}\{d(u_0, u) + w(uv)\}. \tag{3}$$

Ova formula je osnov Dajkstrinog algoritma. Počevši od skupa $S = \{u_0\}$, rastući niz $S_0, S_1, ..., S_{v-1}$ podskupova skupa V je konstruisan na taj način gde su na kraju i-tog koraka poznati svi najkraći putevi između u_0 i svih ostalih čvorova u S_i. Prvi korak je odrediti čvor najbliži čvoru u_0. To se postiže računanjem $d(u_0, \bar{S}_0)$ i odabirom čvora $u_1 \in \bar{S}_0$ takvog da važi $d(u_0, u_1) = d(u_0, \bar{S}_0)$. Iz (3) sledi:

$$d(u_0, \bar{S}) = min_{u \in S_0, v \in \bar{S}_0}\{d(u_0, u) + w(uv)\} = min\{w(u_0 v)\}$$

pa se $d(u_0, \bar{S})$ lako izračunava. Sada postavimo skup $S_1 = \{u_0, u_1\}$ i sa P_1 obeležimo put $u_0 u_1$; to je očigledno i najkraći $u_0 - u_1$ put. Generalno, ako su skup $S_k = \{u_0, u_1, ..., u_k\}$ i odgovarajući najkraći putevi $P_1, P_2, ..., P_k$ već određeni, računamo $d(u_0, \bar{S}_k)$ koristeći jednakost (3) i biramo čvor $u_{k+1} \in \bar{S}_k$ tako da $d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, \bar{S}_k)$. Iz jednakosti (3) sledi: $d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, u_j) + w(u_j u_{k+1})$ za neko $j \leq k$, te dodavanjem grane $u_j u_{k+1}$ putu P_j dobijamo najkraći $u_0 - u_{k+1}$ put.



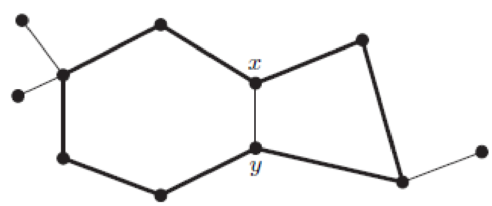
Slika 9: Ilustracija procesa nalaženja najkraćeg puta u grafu pomoću Dajkstrinog algoritma.

3.2 Ciklus

Definicija 3.2 *Ako je* $P = x_0...x_{k-1}$ *put i ako je* $k \geq 3$*, onda se graf* $C := P + x_{k-1}x_0$ *naziva* ***ciklus****.*

Kao što je slučaj i kod puteva, možemo označiti i ciklus kao (ciklični) niz njegovih čvorova. Na primer, $C := x_0...x_{k-1}x_0$. Dužina ciklusa je broj njegovih grana (ili čvorova). Ciklus dužine k se naziva k-ciklus i obeležava sa C^k.

Minimalna dužina ciklusa u G je *obim* grafa G i obeležava se sa $g(G)$; maksimalna dužina ciklusa u G je njegov *opseg* ($c(G)$). (Ako graf ne sadrži ciklus postavljamo $g(G) = \infty$ i $c(G) = 0$). Grana koja povezuje dva čvora ciklusa, ali ne pripada njemu naziva se *tetiva* ciklusa. Dakle, indukovani ciklus u grafu G (tj. ciklus u G koji formira indukovani podgraf) nema nijednu tetivu. (Slika 10)



Slika 10: Ciklus C^8 sa tetivom xy i indukovanim ciklusima C^6, C^4.

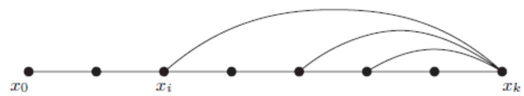
Ako graf ima veliki minimalni stepen ($\delta(G)$) onda on sadrži dugačke puteve i cikluse.

Iskaz 3.3 *Svaki graf* G *sadrži put dužine* $\delta(G)$ *i ciklus dužine bar* $\delta(G) + 1$ *(uz uslov da je* $\delta(G) \geq 2$*).*

Dokaz. Neka je $x_0...x_k$ najduži put u grafu G. Onda svi susedi čvora x_k moraju biti na tom putu. Čvor x_k može imati najviše k suseda i ako je baš $\delta(G) = k$ (uzimamo tzv. "najgori slučaj") opet će biti zadovoljen uslov da u grafu postoji put $P^{\delta(G)}$. Dalje, ako je $i < k$ minimalno tako da važi $x_ix_k \in E(G)$, onda je $x_i...x_kx_i$ ciklus dužine bar $\delta(G) + 1$. (Slika 11) $\square$

Razdaljina $d_G(x, y)$ u grafu G između dva čvora x i y jer dužina najkraćeg $x - y$ puta u G; ako takav put ne postoji postavljamo $d(x, y) := \infty$. Najduža razdaljina između bilo koja dva čvora u G naziva se prečnik grafa G i obeležava se sa $diam(G)$

Iskaz 3.4 *Svaki graf* G *koji sadrži ciklus zadovoljava* $g(G) \leq 2diam(G) + 1$.



Slika 11: Najduži put $x_0...x_k$ i susedi čvora x_k.

Dokaz. Neka je C najkraći ciklus u G. Ako je $g(G) \geq 2diam(G)+2$, sledi da taj ciklus ima dva čvora čije je rastojanje u C bar $diam(G)+1$. U grafu G, dakle, mora postojati kraće rastojanje između ta dva čvora koje ne pripada ciklusu C (jer je $diam(G)+1 > diam(G)$), recimo da je to put P. Dalje, kako se C sastoji od dva $x-y$ puta, kraći od ta dva puta sa putem P formira ciklus čija je dužina kraća od dužine ciklusa C što je kontradikcija jer smo pretpostavili da je C najkraći ciklus u G. Dakle,

$$g(G) < 2diam(G) + 2 \Leftrightarrow g(G) \leq 2diam(G) + 1$$

□

Čvor je *centralan* u G ako je njegova najduža razdaljina od bilo kog drugog čvora najmanja moguća. Ovo rastojanje se naziva poluprečnik grafa G i obeležava se sa $rad(G)$. Dakle, formalno, $rad(G) = min_{x\in V(G)} max_{y\in V(G)} d_G(x,y)$.

Iskaz 3.5 *Graf G čiji je poluprečnik najviše k i maksimalni stepen najviše d nema više od $1+kd^k$ čvorova.*

Dokaz. Neka je z centralni čvor u G i obeležimo sa D_i skup čvorova u G na rastojanju i od z. Onda je $V(G) = \cup_{i=0}^{k} D_i$ i $|D_0| = 1$. Kako je $\Delta(G) \leq d$, onda je $|D_i| \leq d|D_{i-1}|$ za $i = 1, ..., k$ i odatle je $|D_i| \leq d^i$ po indukciji. Sabirajući ove nejednakosti dobijamo:

$$|V(G)| \leq 1 + \sum_{i=1}^{k} d^i \leq 1 + kd^k$$

□

Definicija 3.6 ***Šetnja*** *(dužine k) u grafu G je neprazan naizmenični niz čvorova i grana $v_0e_0v_1e_1...e_{k-1}v_k$ takav da je $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$.*

Ako je u šetnji $v_0 = v_k$ ona je zatvorena. Ako su svi čvorovi u šetnji različiti, ona definiše put u G. Generalno, svaka šetnja između dva čvora sadrži put između tih čvorova.

4 Povezani grafovi

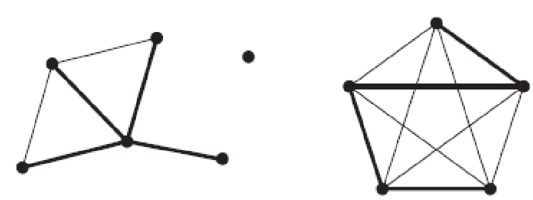
Definicija 4.1 *Graf G je **povezan** ako između bilo koja dva njegova čvora postoji put. Ako je $U \subseteq V(G)$ i $G[U]$ je povezan, kažemo takođe da je U povezan (u G).*

Iskaz 4.2 *Čvorovi povezanog grafa G uvek mogu biti numerisani, na primer $v_1, ..., v_n$, tako da je $G_i := G[v_1, ..., v_i]$ povezan za svako i.*

Dokaz. Označimo bilo koje teme kao v_1 i pretpostavimo da su $v_1, ..., v_i$ izabrani za neko $i < |G|$. Sada izaberimo čvor $v \in G - G_i$. Pošto je G povezan, on sadrži put $v - v_1$. Zatim označimo sa v_{i+1} poslednji čvor tog puta koji se nalazi u $G - G_i$ (idući od v ka v_1 poslednji čvor u $G - G_i$ neka bude v_{i+1}). Kako sledeći čvor na putu $v - v_1$ posle v_{i+1} pripada grafu G_i, dakle čvor v_{i+1} ima suseda u G_i. Povezanost svakog grafa G_i sledi iz indukcije po i. $\square$

Definicija 4.3 *Neka je $G = (V, E)$ graf. Maksimalni povezani podgraf grafa G naziva se **komponenta**. (Slika 12)*

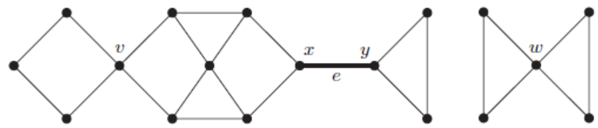
Primetimo da je komponenta, usled njene povezanosti, neprazan graf. Prazan graf, dakle, nema komponente.



Slika 12: Graf sa tri komponente i minimalnim razapinjućim povezanim podgrafom u svakoj od njih

Ako su $A, B \subseteq V$ i $X \subseteq V \cup E$ takvi da svaki $A - B$ put u G sadrži čvor ili granu iz X, kažemo da X *razdvaja* skupove A i B u grafu G. Ovo dalje implicira da je $A \cap B \subseteq X$. Uopštenije, kažemo da X razdvaja G, i skup X nazivamo *razdvajajući skup* u G, ako X

razdvaja dva čvora iz $G-X$ u G. Čvor koji razdvaja dva druga čvora iste komponente naziva se *presečni čvor*, a grana koja razdvaja svoje krajeve je *most*. Dakle, mostovi u grafu su one grane koje ne pripadaju nijednom ciklusu. (Slika 13)

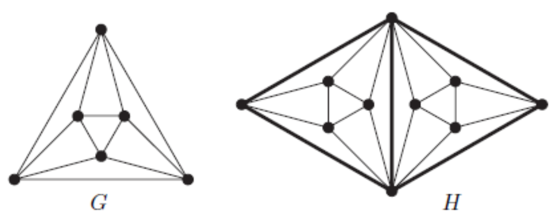


Slika 13: Graf sa presečnim čvorovima v, x, y, w i mostom $e = xy$.

Graf G se naziva *k-povezan* (za $k \in \mathbb{N}$) ako $|G| > k$ i ako je $G-X$ povezan za svaki skup $X \subseteq V$ gde je $|X| < k$. Drugim rečima, ne postoji skup čvorova tog grafa sa $k-1$ elemenata koji bi, ako bi se uklonio iz grafa, učinio taj graf nepovezanim. Svaki neprazan graf je 0-povezan, a 1-povezani grafovi su svi netrivijalni povezani grafovi.

Najveći broj k takav da je G k-povezan naziva se *povezivost* $\kappa(G)$ u G. Dakle, $\kappa(G) = 0$ ako i samo ako je G nepovezan ili K^1 i $\kappa(K^n) = n-1$ za sve $n \geq 1$.

Ako je $|G| > 1$ i ako je $G-F$ povezan za svaki skup $F \subseteq E$ sa manje od l grana, onda se G naziva l-grane-povezan. Najveći ceo broj l takav da je G l-grane-povezan je ivična povezivost $\lambda(G)$ u G. Specijalno, $\lambda(G) = 0$ ako je G nepovezan. (Slika 14)



Slika 14: Oktaedar G (levo) sa $\kappa(G) = \lambda(G) = 4$ i graf H sa $\kappa(H) = 2$, a $\lambda(H) = 4$

Za svaki netrivijalni graf važi:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)^5$$

[5] **Dokaz.** Dokažimo prvo $\lambda(G) \leq \delta(G)$:max$(\lambda(G)) = \delta(G)$ jer uklanjanjem svih grana iz čvora sa minimalnim stepenom dobijamo nepovezan graf. Takođe, $max(\kappa(G) = \delta(G)$ jer uklanjanjem baš toliko čvorova ($|\lambda(G)|$ čvorova) koji sadrže date grane dobijamo nepovezan graf. Dakle, važi $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

Dakle, veliki minimalni stepen ne podrazumeva veliku povezivost $\kappa(G)$ ni veliku grana-povezivost $\lambda(G)$.

5 Drva i šume

Acikličan graf, odnosno graf koji ne sadrži nijedan ciklus, naziva se **šuma**. Povezana šuma se naziva **drvo** (dakle, šuma je graf čije su komponente drva). Čvorovi u drvetu čiji je stepen 1 nazivaju se njegovi listovi. Svako netrivijalno drvo ima bar dva lista; na primer, krajevi najdužeg puta. Ako uklonimo jedan list sa drveta, graf koji ostane takođe je drvo. (Slika 15)

Slika 15: Drvo

Teorema 5.1 *Sledeće tvrdnje su ekvivalentne za graf T:*

1. *T je drvo.*
2. *bilo koja dva čvora u T su povezana tačno jedim putem u T.*
3. *T je minimalno povezan, tj. T je povezan, ali $T - e$ je nepovezan za bilo koje $e \in T$*
4. *T je maksimalno acikličan, tj. T ne sadrži cikluse, ali $T + xy$ sadrži za bilo koja dva nesusedna čvora x i y.*

Dokaz. Dokažimo ekvivalentnost tvrdnji 1 i 2: pretpostavimo da postoje dva čvora x i y u T povezana sa dva puta, recimo P_1 i P_2. Tada bi xP_1yP_2x bio ciklus, što je kontradikcija sa definicijom da drvo ne sadrži cikluse. Dokažimo sada ekvivalentnost tvrdnji 2 i 3: kako izmedju bilo koja dva čvora postoji tačno jedan put, to važi i za dva susedna čvora. Ako uklonimo jednu granu e iz grafa T, njeni krajnji čvorovi ostaće nepovezani. Dokažimo ekvivalentnost tvrdnji 2 i 4: neka su x, y i z čvorovi u T (gde su x i y nesusedni i gde je se čvor z nalazi na putu $x - y$). Postoji tačno jedan $z - x$ put (P_1) i tačno jedan $z - y$ put (P_2). Ako bismo grafu T dodali granu xy, onda bi zP_1xyP_2z bio ciklus što je kontradikcija.

□

Posledica 5.2 *Čvorovi drvetamogu uvek biti numerisani, recimo $v_1, ..., v_n$, takod a svaki v_i sa $i \geq 2$ ima jedinstvenog suseda u $\{v_1, ..., v_{i-1}\}$.*

Dokaz. Dokaz ovog iskaza se izvodi na isti način kao i dokaz iskaza 4.2.

□

Posledica 5.3 *Povezan graf sa n čvorova je drvo ako i samo ako ima $n - 1$ grana.*

Dokaz. Indukcija po i pokazuje da razapinjući podgraf na prvih i čvorova obeleženih prema posledici 5.2 ima $i - 1$ grana; $i = n$ dokazuje datu posledicu. Obratno, neka je G bilo koji povezan graf sa n čvorova i $n - 1$ grana. Neka je G' razapinjuće drvo u grafu G. Kako iz prvog dela dokaza seldi da G' ima $n - 1$ grana, zaključujemo da važi $G = G'$.

□

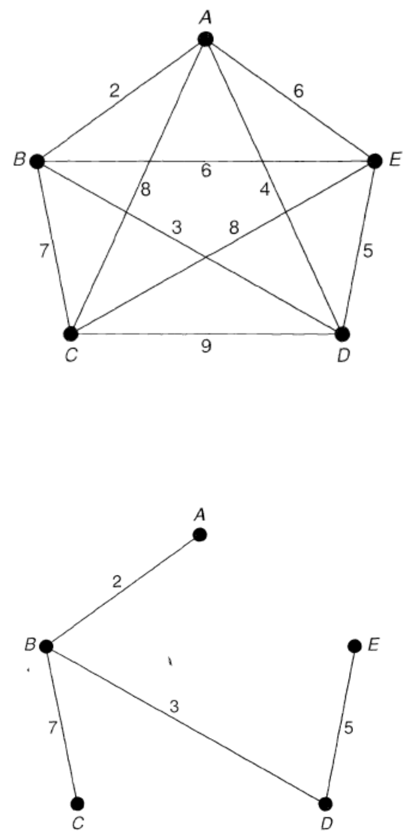
5.1 Problem nalaženja minimalnog razapinjućeg drveta

Pretpostavimo da u jednoj zemlji treba izgraditi mrežu železnica koja će povezivati n gradova. Ako zbog finansijskih razloga ukupna dužina železnice mora biti minimalna, onda graf formiran tako da n gradova predstavlja njegove čvorove i pruge izmedju njih njegove grane, mora biti drvo. Problem je naći algoritam koji bi mogao odrediti koje od n^{n-2}[6] drva koja se mogu formirati tako da povezuju date gradove će biti optimalno (uz pretpostavku da su razdaljine između gradova poznate).

Kao i problem nalaženja najkraćeg puta u grafu, i ovaj problem može biti predstavljen pomoću težinskih grafova. Težine grana obeležavamo sa $w(e)$, a cilj je pronaći razapinjuće drvo u kompletnom grafu sa najmanjom mogućom težinom $W(T)$. Algoritam koji lako rešava ovaj problem je poznat kao *pohlepni algoritam* i zasniva se na odabiru

[6] Engleski matematičar Artur Kejli je došao do formule da se pomoću n čvorova može formirati n^{n-2}. Postoji više dokaza koji potvrđuju tačnost ove formule, ali ih ovde neću iznositi.

grana minimalne težine tako da se prilikom formiranja razapinjućeg grafa ne stvori ciklus. Na primer, ako je dato 5 gradova kao što je prikazano na slici 16 konstrukciju počinjemo odabirom grana AB (težine 2) i BD (težine 3). Sada ne možemo izabrati granu AD (težine 4) jer bi se u tom slučaju formirao ciklus ABD, tako da biramo granu DE. Zatim uzimamo granu BC čime se konstrukcija drveta završava.



Slika 16: Primer nalaženja drveta minimalne težine u grafu.

Teorema 5.4 *Neka je G povezan graf sa n čvorova. Onda sledeća konstrukcija daje rešenje za problem nalaženja minimalnog razapinjućeg drveta u grafu:*

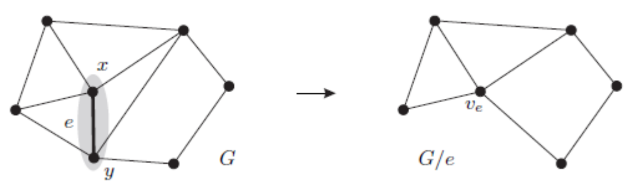
1. *Neka je e_1 grana u G najmanje težine.*
2. *Definišimo $e_2, e_3, ..., e_{n-1}$ biranjem nove grane (sa zajedničkim čvorom sa jednom od prethodno odabranih grana) najmanje moguće težine koja ne formira ciklus sa prethodno izabranim granama e_i.*

Dokaz. Činjenica da je T razapinjuće drvo grafa G sledi iz teoreme 5.1 i posledice 5.3. Pokažimo da je težina drveta T formirana na ovaj način minimalna. Pretpostavimo da je S razapinjuće drvo grafa G takvo da $W(S) < W(T)$. Ako je e_k prva grana u prethodno pomenutom nizu koja ne pripada S (a pripada T) onda podgraf od G formiran dodavanjem grane e_k grafu S sadrži jedinstven ciklus C koji sadrži granu e_k. Kako C sadrži i granu e koja nije u T, podgraf formiran uzimanjem grane e_k umesto e je razapinjuće drvo S' grafa G. Međutim, po konstrukciji pomoću algoritma važi $w(e_k) \leq w(e)$, pa samim tim i $W(S') \leq W(S)$ gde S' ima jednu granu više zajedničku sa T nego što je to slučaj sa S. Ovaj postupak se ponavlja sve dok se S' ne poklopi sa T pa zaključujemo da važi $W(T) \leq W(S)$ što je kontradikcija sa početnom pretpostavkom.

$\square$

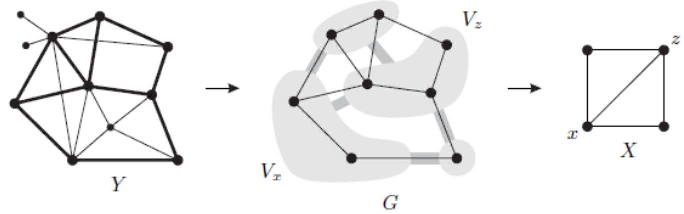
6 Sažimanje i minori

Neka je $e = xy$ grana grafa $G = (V, E)$. Sa G/e obeležavamo graf dobijen sažimanjem grane e u novi čvor v_e koji postaje susedni svim prethodnim susedima čvorova x i y. Formalno, G/e je graf V', E' sa skupom čvorova $V' := (V \setminus \{x, y\}) \cup \{v_e\}$ (gde je v_e novonastali čvor, tj. $v_e \notin V \cup E$) i sa skupom grana $E' := \{vw \in E | \{v, w\} \cap \{x, y\} = \varnothing\} \cup \{v_e w | xw \in E \setminus \{e\} \vee yw \in E \setminus \{e\}\}$. (Slika 17)



Slika 17: Sažimanje grane $e = xy$.

Neka je X graf i neka je $\{V_x | x \in V(X)\}$ particija skupa V čiji su elementi povezani podskupovi takvi da za svaka dva čvora $x, y \in X$ postoji $V_x - V_y$ grana u G, ako i samo ako je $xy \in E(X)$. Takav graf G nazivamo MX (gde "M" znači "minor") i pišemo $G = MX$. Drugim rečima, X dobijamo od G sažimanjem svakog V_x skupa u jedan čvor i brisanjem svih paralelnih stranica ili petlji koje mogu nastati.



Slika 18: $Y \supseteq G = MX$, pa je X minor grafa Y.

7 Ojlerov put

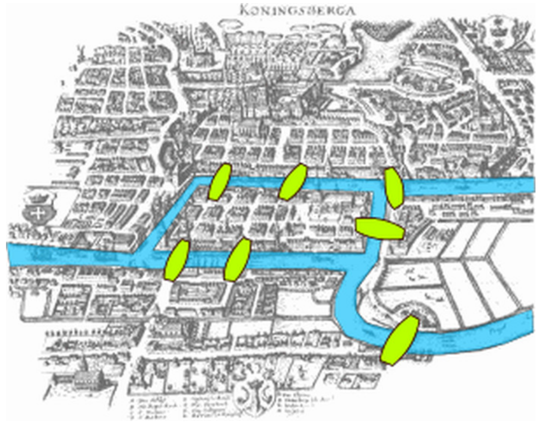
Pojam Ojlerovog[7] grafa prvi put uveden je 1736. godine nakon što je švajcarski matematičar Leonard Ojler predstavio rešenje poznatog matematičkog problema o sedam mostova Kalinjingrada. Naime, Kalinjingrad (današnja Rusija) se nalazi sa obe strane reke Pregel uključujući i dva velika rečna ostrva međusobno i sa obalama povezana mostovima. Pitanje je bilo da li je moguće napraviti takvu šetnju gradom da svaki most bude pređen tačno jednom uz uslov da se reka može preći samo preko mosta i nikako drugačije. Početna i krajnja tačka šetnje ne moraju biti iste. Plan grada dat je na slici 19.

Definicija 7.1 *Ojlerov graf je graf kod koga je moguće napraviti šetnju koja obilazi svaku granu grafa tačno jednom.*

Teorema 7.2 *Povezan graf je Ojlerov ako i samo ako je svaki čvor parnog stepena ili ako graf ima tačno dva čvora neparnog stepena. (Ojler, 1736)*

Dokaz. Vrednost stepena nekog čvora u grafu svakako je značajna za ovaj problem. Svaki čvor mora imati tzv. ulaznu i izlaznu granu. Odnosno, ako prateći neku granu iz jednog čvora dođemo u drugi, ne možemo koristiti istu granu kako bismo izašli iz tog čvora i prešli u sledeći. Dakle, svako teme mora imati stepen oblika $\delta(v) = 2k$. Ako graf ima tačno dva čvora neparnog stepena on je takođe Ojlerov u kome Ojlerova šetnja počinje u jednom, a završava se u drugom čvoru neparnog stepena. Obratno, neka je G povezan graf čiji su svi čvorovi parnog stepena i neka je

[7]Leonard Ojler (Leonhard Euler, 1707-1783) je bio švajcarski matematičar i fizičar i jedan od najznačajnijih matematičara ikada. Živeo je i radio u Berlinu i Sankt Peterburgu. Došao je do velikih otkrića u različitim oblastima matematičke analize i teorije grafova, dok je dao i značajan doprinos granama kao što su topologija i analitička teorija brojeva. Takođe je zaslužan za savremeni zapis matematičke funkcije i unapređenje terminologije u matematici. Poznati su njegovi radovi i u oblastima mehanike, dinamike fluida, optike, astronomije i teoriji muzike.



Slika 19: Mapa Kalinjingrada u 18. veku na kojoj je istaknuto sedam mostova preko reke Pregel. Ojler se pitao da li je moguće prošetati gradom, tako da se svaki most pređe jednom i samo jednom.

$$W = v_0 e_0 ... e_{l-1} v_l$$

najduža šetnja u G koja ne sadrži nijednu granu više od jedanput. Kako je W najduža šetnja i stoga ne može biti proširena, zaključujemo da dolaskom u čvor v_l prelazi sve grane grafa. Odatle je $v_0 = v_l$, pa je W zatvorena šetnja. Pretpostavimo sada da W nije Ojlerov graf. Onda G sadrži granu e izvan W, ali susednu sa čvorom u W, recimo $e = uv_i$. Onda je šetnja

$$W' = uev_i e_i ... e_{l-1} v_l e_0 ... e_{i-1} v_i$$

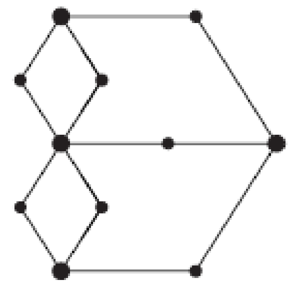
duža od W što je kontradikcija.

□

Ovim dokazom smo pokazali da je svaki graf koji sadrži samo čvorove parnog stepena ili tačno dva čvora neparnog stepena Ojlerov. (Ako je u pitanju graf G sa dva čvora neparnog stepena, recimo v_t i v_u on se svodi na graf sa svim čvorovma parnog stepena tako što pođemo od npr. v_t i najkraćim putem dođemo do v_u. Obeležimo taj put sa P. Onda je graf $G' = G - P$ sa svim čvorovima parnog stepena.)

Predstavimo sada problem sedam mostova Kalinjgrada pomoću grafa. (Slika 20)

Dakle, pošto graf sa slike 20 sadrži 4 čvora neparnog stepena, on nije Ojlerov. Odavde sledi da je nemoguće napraviti takvu šetnju da se svaki most pređe tačno jedanput.



Slika 20: Problem sedam mostova Kalinjgrada predstavljen pomoću grafa.

7.1 Problem kineskog poštara

Problem kineskog poštara je 1962. godine osmislio kineski matematičar Kuan. Problem glasi:

Naći najkraći put koji poštar mora da pređe kako bi u svakoj ulici jednog grada dostavio pisma, ako znamo da je pošta njegovo početno i krajnje odredište.

U težinskom grafu definišemo težinu zatvorene šetnje $v_0 e_1 v_1 ... e_n v_0$ kao $\sum_{i=1}^{n} w(e_i)$. Očigledno je da se rešenje problema kineskog poštara svodi na nalaženje zatvorene šetnje minimalne težine u težinskom povezanom grafu sa nenegativnim težinama. Nazovimo takvu šetnju optimalnom.

Ako je graf G Ojlerov, onda je bilo koja Ojlerova šetnja optimalna jer posećuje svaku granu tačno jednom. Sa druge strane, ako graf nije Ojlerov, rešenje za problem kineskog poštara je znatno komplikovanije, ali i u tom slučaju postoji algoritam koji će pronaći optimalno rešenje. Vratimo se sada na slučaj kada je u pitanju Ojlerov graf. Tada se problem kineskog poštara lako rešava jer postoji dobar algoritam za određivanje Ojlerove zatvorene šetnje u Ojlerovom grafu. Sledeći algoritam konstruiše Ojlerovu šetnju na sledeći način:

Počnimo od bilo kog čvora u i prelazimo grane na proizvoljan način poštujući pritom dva uslova:

1. Obeležimo grane koje smo prešli i ako pritom rezultira izolovani čvor, obrišimo i njega takođe.

2. U svakom koraku koristimo most jedino u slučaju da nema alternativne grane.

Po definiciji ovaj algoritam konstruiše šetnju u grafu G.

Teorema 7.3 *Ako je G Ojlerov graf, onda je bilo koja šetnja konstruisana po pomenutom algoritmu Ojlerova.*

Dokaz. Pokažimo da konstrukcija može biti završena. Pretpostavimo da smo počevši od čvora u tokom konstrukcije šetnje stigli do čvora v. Ako $u \neq v$, onda je podgraf H koji preostaje povezan (nismo prešli most) i sadrži tačno dva čvora neparnog stepena (u i v).Da bismo pokazali da konstrukcija Ojlerove šetnje po ovom algoritmu može biti nastavljena moramo pokazati da brisanje naredne grane neće dovesti do toga da podgraf H koji ostane bude nepovezan. Ekvivalentno tome, dovoljno je pokazati da je čvor v incidentan sa najviše jednim mostom (ako bi v bio incidentan sa više mostova, prelazak i brisanje jednog od njih bi ostavilo podgraf H nepovezan). Da bismo pokazali kontradikciju pretpostavimo da postoji još jedan takav most, na primer vw. Pošto su svi čvorovi Ojlerovog grafa parnog stepena, uklanjanje grane vw ostavlja čvor w neparnog stepena. Dalje, čvor w ostaje jedini čvor neparnog stepena u povezanoj komponenti (jer u ne pripada toj komponenti, u suprotnom grana vw ne bi bila most, a svi čvorovi Ojlerovog grafa su parnog stepena). Kao što je dokazano u iskazu 2.8 broj čvorova neparnog stepena u povezanom grafu uvek je paran, što je kontradikcija.

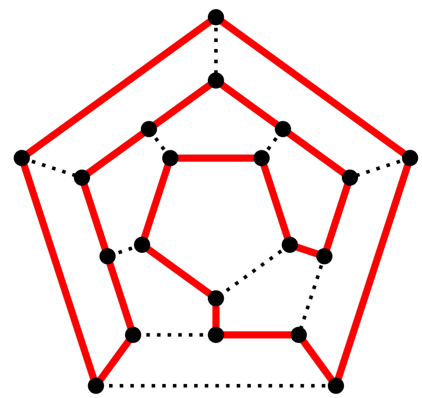
$\square$

8 Hamiltonov ciklus

Za razliku od problema koji je Leonard Ojler postavio u ovom poglavlju biće reč o problemu da li i kada graf sadrži ciklus, put ili šetnju, (zatvorenu ili otvorenu) koja svaki čvor tog grafa posećuje tačno jednom. Ovde će biti reč najviše o ciklusima sa zadatom osobinom; takvi ciklusi se nazivaju Hamiltonovi[8] ciklusi. (Slika 21)

Odrediti da li graf sadrži Hamiltonov ciklus je komplikovanije nego odrediti da li je taj graf Ojlerov. Naredna teorema dokazuje jedan od potrebnih uslova za postojanje Hamiltonovog ciklusa u grafu.

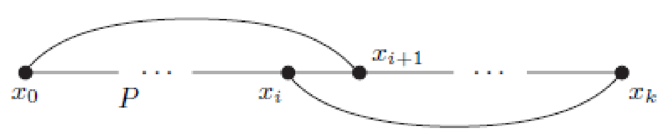
[8]Vilijam Rouan Hamilton (William Rowan Hamilton, 1805-1865) je bio irski matematičar, fizičar i astronom koji je dao značajan doprinos razvoju algebre, optike i dinamike. U najranijoj mladosti Hamilton ispoljava talenat u oblasti lingvistike, pesništva i uopšte književnosti i filozofije. Vrlo rano je pokazao i talenat za matematiku. Studije je završio na Triniti koledžu gde se kasnije i zaposlio kao profesor matematike i astronomije. U svetu matematike je postao poznat i po kvaternionima, a u svetu mehanike i fizike po tzv. Hamiltonovim jednačinama i varijacionom principu poznatom još kao i Hamiltonov princip.



Slika 21: Primer Hamiltonovog ciklusa.

Teorema 8.1 *(Dirak, 1952.)Svaki graf sa $n \geq 3$ čvorova i minimalnim stepenom najmanje $\frac{n}{2}$ sadrži Hamiltonov ciklus.*

Dokaz. Neka je $G = (V, E)$ graf sa $|G| = n \geq 3$ i $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$. Dakle, G je povezan; u suprotnom bi stepen bilo kog čvora u najmanjoj komponenti C grafa G bio manji od $|C|$, gde je $|C| \leq \frac{n}{2}$. Neka je $P = x_0 ... x_k$ najduži put u grafu G. Kako je P maksimalne dužine, zaključujemo da se svi susedi čvorova x_0 i x_k moraju nalaziti na putu P (u suprotnom put P ne bi bio najduži kao što smo pretpostavili). Odatle važi da je najmanje $\frac{n}{2}$ od čvorova $x_0, ..., x_{k-1}$ susedno sa x_k (jer mora važiti bar $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$) i bar $\frac{n}{2}$ od ovih $k < n$ čvorova x_i, $i \in \{0, ..., k\}$ su takvi da važi $x_0 x_{i+1} \in E$ (tj. da je $x_0 x_{i+1}$ grana u tom grafu). Kako i x_0 i x_k imaju bar po $\frac{n}{2}$ suseda na putu P (među $k < n$ čvorova) po Dirihleovom principu mora postojati čvor x_i koji ima obe osobine, tj. važi $x_0 x_{i+1} \in E$ i $x_i x_k \in E$. (Slika 22)



Slika 22: Traženje Hamiltonovog ciklusa u dokazu Teoreme 8.1.

Sada tvrdimo da je ciklus $C := x_0 x_{i+1} P x_k x_i P x_0$ Hamiltonov u grafu G. Ovo je tačvno, pošto je graf G povezan, C bi u suprotnom imao suseda u $G - C$, što bi se moglo sa razapinjućim putem od C u put duži od P, što je suprotno pretpostavci da je P najduži put u G.

$\square$

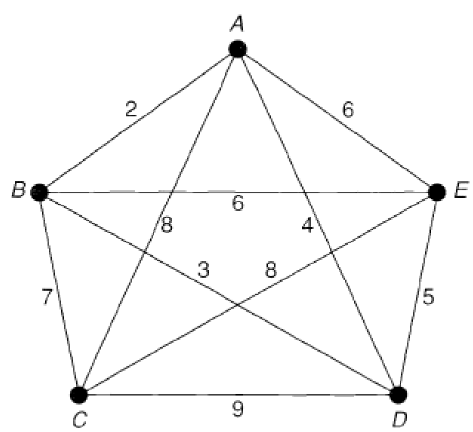
Teorema 8.1 je najbolja moguća u smislu da ne možemo zameniti granicu $\frac{n}{2}$ sa $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$: ako je n neparan i ako G predstavimo kao uniju dva identična grafa $K^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ koji imaju jedan zajednički čvor, onda će zaista važiti $\delta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ali i $\kappa(G) = 1$, pa G ne može imati Hamiltonov ciklus.

Drugim rečima, potrebno je obezbediti granicu $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, a ako ništa drugo, da je graf G 2-povezan (tj. $\kappa(G) = 2$) - uslov koji je trivijalno potreban za postojanje Hamiltonovog ciklusa, baš kao i uslov da je minimalni stepen grafa bar 2 ($\delta(G) \geq 2$).

Prethodno dokazana teorema je jedan od osnovnih uslova koje je potrebno ispuniti ne bi li se osiguralo postojanje Hamiltonovog ciklusa u grafu. Postoji još mnogo teorema koje se bave istom temom kao što su Tatova teorema iz 1956. Hvatalova teorema iz 1972. ili značajna i lepa Flajšnerova teorema iz 1974. godine. One, međutim, u ovom radu neće biti dokazane jer je za njihovo izvođenje potrebno više znanje iz teorije grafova.

8.1 Problem trgovačkog putnika

U ovom problemu trgovački putnik želi da poseti nekoliko gradova i da se vrati na početno mesto, pri čemu bi prešao najkraći mogući put. Na primer, ako treba da poseti pet gradova (A, B, C, D i E) i ako su njihova međusobna rastojanja ista kao na slici 23, najkraći mogući put je $A \to B \to D \to E \to C \to A$ gde je ukupna dužina koju trgovac treba da pređe jednaka 26.



Slika 23: Gradovi i njihova medjusobna rastojanja predstavljeni grafom.

Ovaj problem se takođe može posmatrati pomoću težinskih grafova. U tom slučaju potrebno je naći Hamiltonov ciklus najmanje moguće težine u kompletnom težinskom grafu. Dakle, kada bismo mogli da nađemo efikasni algoritam za rešavanje problema trgovačkog putnika isti algoritam bi se mogao primeniti prilikom rešavanja mnoštvo sličnih problema.

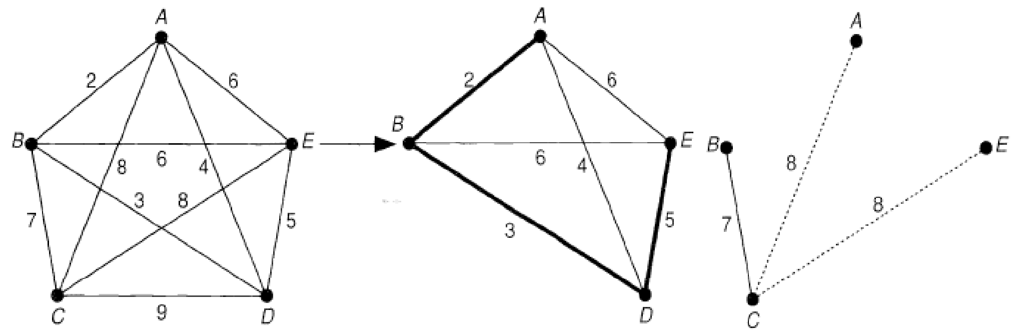
Problem trgovačkog putnika, međutim, spada u klasu tzv. NP-kompletnih[9] problema i još uvek ne postoji algoritam koji bi u svakom slučaju u polinomijalnom vremenu odredio optimalni put kojim bi trgovac trebao da ide kako bi obišao n gradova.

Jedno od mogućih rešenja ovog problema je računanje dužine svih Hamiltonovih ciklusa u grafu, te traženje najkraćeg od njih. Sa druge strane, rešavanje problema trgovačkog putnika sa 6 i više gradova na ovaj način je izuzetno komplikovano i neefikasno. Na primer, ako je u pitanju 20 gradova, broj mogućih Hamiltonovih ciklusa je $\frac{19!}{2}$, što je reda veličine 10^{16}. Do sada je predloženo mnogo algoritama koji bi bili u stanju da reše ovaj problem, ali njihova primena u praksi ne bi bila isplativa. Takođe postoji nekoliko algoritama koji mogu izračunati približno najkraći put.

Kako bismo odredili donju granicu optimalnog Hamiltonovog ciklusa u ovom problemu možemo iskoristiti pohlepni algoritam o kom je bilo reči u poglavlju 5. Ako bismo izabrali bilo koji Hamiltonov ciklus u kompletnom težinskom grafu G i ukoliko bismo uklonili jedan čvor v, ostatak izabranog Hamiltonovog ciklusa bio bi razapinjuće drvo u grafu $G-v$. Dakle, bilo koji Hamiltonov ciklus se mora sastojati od jednog razapinjućeg drveta ovog tipa zajedno sa dve grane najmanje težine incidentne sa v. Na ovaj način dobijamo donju granicu rešenja problema trgovačkog putnika.

Ako bismo, na primer, razmotrili kompletan težinski graf dat na slici 24 i uklonili čvor C, preostali težinski graf bi imao četiri čvora A, B, D i E. Minimalno težinsko razapinjuće drvo koje povezuje ova četiri čvora sadrži grane AB, BD i DE sa ukupnom težinom 10 i dve grane minimalne težine incidentne sa C su CB i CA (ili CE) sa ukupnom težinom 15. (Slika 24). Dakle, tražena donja granica rešenja za ovaj probelm je 25. Kako je pravo rešenje 26, vidimo da aproksimacija pomoću pohlepnog algoritma može dati iznenađujuće dobre rezultate.

[9] Više o teoriji kompleksnosti i NP klasi problema u knjizi *Computational Complexity: A Modern Approach*, Sanjeev Arora i Boaz Barak, Princeton University, 2009.



Slika 24: Primer određivanje donje granice rešenja problema trgovačkog putnika pomoću tzv. pohlepnog algoritma.

9 Hipergraf, usmeren graf, multigraf

U ovom poglavlju su bez dubljeg ulaženja u temu date još neke definicije vezane za grafove.

9.1 Hipergraf

Definicija 9.1 ***Hipergraf*** *je par* (V, E) *skupova gde su elementi skupa* E *neprazni podskupovi (bilo koje kardinalnosti) skupa* V.

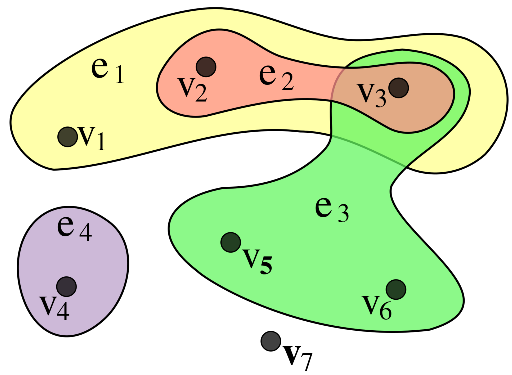
Formalnije zapisano: $H = (V, E)$ gde je V skup čvorova, a $E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\varnothing\}$ gde je $\mathcal{P}(V)$ partitivni skup od V.

Za razliku od grafova, hipergrafove je teško prikazati u 2D prostoru, pa se oni uglavnom izučavaju pomoću nomenklature teorije skupova, pre nego korišćenjem vizuelnih prikaza iz teorije grafova. (Slika 25)

9.2 Usmeren graf

Definicija 9.2 ***Usmeren graf*** *ili* ***digraf*** *(**di**rected **graph**) je par* (V, E) *skupova (čvorova i grana) sa dva preslikavanja:* $init : E \to V$ *i* $ter : E \to V$, *pridajući svakoj grani* e *početni čvor* $init(e)$ *i krajnji čvor* $ter(e)$.

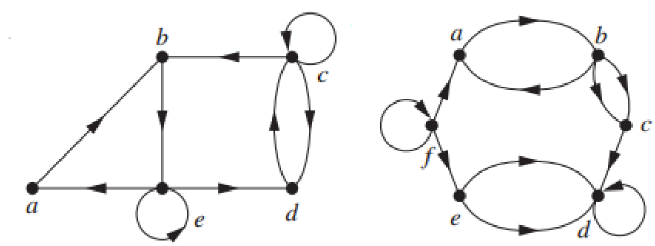
Primetimo još da usmeren graf može imati nekoliko grana između dva ista čvora x i y (tzv. duple grane). Ako takve grane imaju isti smer nazivaju se *paralelne*. Ako je u



Slika 25: 2D prikaz jednostavnijeg hipergrafa $H = (V, E)$. $V = \{v_1, v_2, ..., v_7\}$ i $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5, v_6\}, \{v_4\}\}$

usmerenom grafu $init(e) = ter(e)$ takva grana se naziva *petlja.* (Slika 26)

Za usmeren graf možemo reći i da on predstavlja orijentaciju (usmerenje) neusmerenog grafa G ako važi $V(D) = V(G)$ i $E(D) = E(G)$, ali tako da važi $\{init(e), ter(e)\} = \{x, y\}$ za svaku granu $e = xy$. Intuitivno govoreći orijentisani graf nastaje tako što svakoj grani neusmerenog grafa odredimo smer od jednog kraja (čvora) ka drugom.



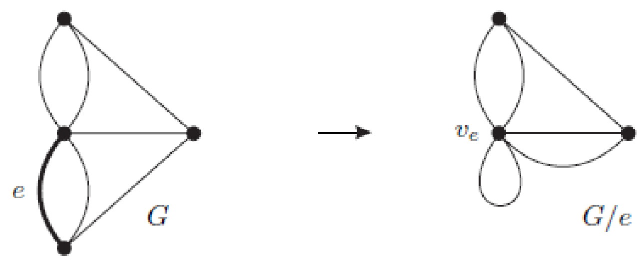
Slika 26: Primer dva usmerena grafa

9.3 Multigraf

Definicija 9.3 ***Multigraf*** *je par* (V, E) *skupova (čvorova i grana) sa preslikavanjem* $E \to V \cup [V]^2$ *dodeljujući svakoj grani jedan ili dva čvora, tj. njegove krajeve.*

Kao i usmereni grafovi multigrafovi, dakle, mogu imati i petlje i više grana čiji su krajevi isti čvorovi. Multigraf se može zamisliti i kao usmeren graf bez usmerenja stranica, tj. bez čvorova $init(e)$ i $ter(e)$. Da bismo izrazili da su x i y krajevi grane i dalje pišemo $e = xy$, ali time više nije nužno određena samo jedna grana.

Graf, dakle, u suštini ima iste osobine kao i multigraf bez petlji i grana sa identičnim krajevima (graf je specijalan slučaj multigrafa). Dve razlike između grafa i multigrafa se, međutim, ističu. Prva je da multigraf može sadržati cikluse dužine 1 ili 2 (petlje i duple grane), a druga razlika se ogleda u tome što ukoliko sažmemo granu $e = xy$ multigrafa $G = (V, E)$ u novi čvor v_e, više neće biti potrebe za brisanjem bilo kojih drugih grana osim e: Grane paralelne sa e postaju petlje, dok grane xv i yv postaju paralelne i čiji su krajevi v_e i v (Slika 27)



Slika 27: Sažimanje stranice e u multigrafu.

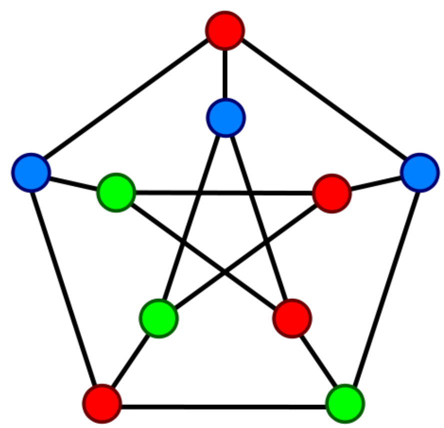
10 Primena

Teorija grafova nalazi veliku primenu u različitim oblastima i naukama, uključujući pritom proučavanje molekula i izgradnja veza u hemiji, kao i izučavanje atoma. Osim toga teorija grafova ima ulogu u sociologiji za merenje, na primer, publiciteta neke javne ličnosti ili prilikom istraživanja mehanizama difuzije. U biologiji se može primeniti u proučavanju migracija živih bića na taj način što bi čvorovi predstavljali staništa određenih vrsta, a grane puteve migracije između tih područja. Dobijene informacije su od velikog značaja u određivanju šablona parenja, praćenja ili proučavanju širenja zaraza i parazita, kao i sagledavanju posledica koje migracije mogu ostaviti po živi svet.

Koncept teorije grafova je raširen i u operacionim istraživanjima. Na primer, problem trgovačkog putnika (v. potpoglavlje 8.1), problem nalaženja minimalnog razapinjućeg drveta (v. potpoglavlje 5.1) ili problem nalaženja najkraćeg puta u grafu (v. potpoglavlje 3.1.1). Takođe, teorija grafova naširoko je korišćena i u modelovanju mreža transporta, istraživanju mrežne aktivnosti i teoriji igara. Najpopularnija i najuspešnija primena mreža u operacionim istraživanjima je planiranje velikih, komplikovanih projekata. Neki od poznatih problema su PERT (Project Evaluation Review Technique) i CPM (Critical Path Method). Dalje, teorija igara se koristi za rešavanje problema u inženjerstvu, ekonomiji i vojnim naukama za nalaženje optimalnog načnina za obavljanje određenih zadataka u datim okruženjima.

Najznačajnija uloga grafova u računarskim naukama jeste razvijanje algoritama. Brojni algoritmi su modelovani pomoću grafova kako bi rešili neki problem. Ti algoritmi se koriste za rešavanje teorijskih koncepata koji pomažu prilikom prešavanja nekih drugih problema. Neki od algoritama su predstavljeni i u ovom radu.

Veoma veliku i značajnu ulogu i izuzetno raširenu primenu ima oblast teorije grafova poznata pod imenom bojenje grafa. Iako ova oblast nije obrađena u ovom radu jer je za njeno temeljno razumevanje potrebno dublje znanje iz različitih drugih oblasti teorije grafova, razni problemi se mogu predstaviti upravo pomoću tehnika iz bojenja grafova. Ispravno bojenje grafa jeste bojenje čvorova pomoću najmanjeg mogućeg broja boja tako da nikoja dva susedna čvora nisu obojeni u istu boju. Najmanji broj boja koji zadovoljava ove uslove naziva se *hromatski broj*, a tako obojen graf je ispravno obojen graf. (Slika 28)



Slika 28: Primer ispravno obojenog grafa.

Nekoliko primera u kojima bojenje grafa može naći primenu su:

1. Bojenje mape sveta - nikoje dve susedne države nisu obojene istom bojom.
2. Planiranje letova - pretpostavimo da postoji k aviona kojima treba biti dodeljeno n letova. Ako bi i-ti let uzimao vremenski interval (a_i, b_i), bilo kom drugom letu čiji vremenski interval bi se preklapao sa datim ne bi mogao biti dodeljen isti avion. Problem može da se modeluje na sledeći način: čvorovi grafa bi predstavljali letove, a grane bi povezivale one letove čiji vremenski intervali se preklapaju.

Taj graf bi, dakle, mogao biti optimalno obojen u polinomijalnom vremenu gde bi hromatski broj grafa bio najmanji mogući broj potrebnih aviona da se dati problem reši.

3. Problem umetničke galerije[10] (Art gallery problem).

Bojenje grafa, naravno, ima mnogo veću i rašireniju primenu, ali s obzirom da ta tema nije obrađena u radu, neće biti dugljeg ulaženja u istu.

Literatura

[1] Reinhard Diestel; Graph Theory; Springer; New York, NY, 2000.

[2] John A. Bondy and Uppaluri S. R. Murty; Graph Theory with Applications; Elsevier Science Publishing Co.; New York, NY; 1982.

[3] Robin J. Wilson; Introduction to Graph Theory; Longman Group Ltd.; Harlow, UK; 1996.

[4] Frank Harary; Graph Theory; Addison-Wesley Publishing Company; Boston, MA; 1969.

[5] S. G. Shirinivas, S. Vetrivel, Dr N. M. Elango; Applications of Graph Theory in Computer Science, an overview; International Journal of Engineering Science and Technology, VOL 2(9), 2010.

[10] Više o ovom problemu u knjizi *Art Gallery, Theorems and Algorithms*, Joseph O'Rourke, Oxford University Press, New York, 1987.